# 「ダグラス生産函数の問題」

## Problems on Douglas' Production Function

種岡輝雄

### はしがき

ダグラスは生産函数 $P=bL^kC^j$ を現実の資料にある種の方法であてはめて、k、jの推定値を求めこれにより、(1) kとjとの和が一に近いか否か―即ち現実の資料が生産函数の一次且つ同次であることを justify するか否か、更に (2) kと実際の製造工業に於ける賃銀支払総額の比率とを比較して、賃銀の限界生産力説が現実に於て妥当するか否かを検討しようとした。こゝで資料として時系列資料がとられた場合はすでに前に考察したから、[1] 本論文では資料として クロスセクション・データが使用された場合をとりあげることにする。 ダグラス自身はこれらの資料から (1) 生産函数が一次且つ同次であること、 (2) 賃銀の限界生産力説は justify されたものと考えているようである。[2] 果してそうであるか。これが本論文で考察すべき事柄であり、問題は (1) ダグラス生産函数の理論模型、 (2) パラメターの推定方法、 (3) 資料、 (4) 推定結果の解釈の何れにも存在するようである。簡単にまえがきして本論に進む。

## 一　ダグラス生産函数の理論模型

生産量を$x_0$、労働及び資本の投入量を$x_1$、$x_2$にてあらわし、$x_1$、$x_2$以外の投入量はないものと考える乃至、$x_1$、$x_2$以外の投入量は必要に応じて自由に投入されるものと考えて、$x_0$、$x_1$、$x_2$の間の関係が

$$x_0 = f(x_1, x_2) \qquad (1)$$

の形の関係式で示されるものとしよう。これが生産函数（production function）である。式(1)について、$x_1$、$x_2$を双方とも$\Lambda$倍（$\Lambda \neq 0$）する場合一般的に

$$\Lambda \mathrm{r}\ x_0 = f(\Lambda x_1, \Lambda x_2) \qquad (2)$$

の関係がみられよう。こゝでもし

$$\mathrm{r} > 1 \qquad (3)$$

であれば、$x_1$、$x_2$を双方共$\Lambda$倍することにより、生産量$x_0$は$\Lambda$倍以上になり、式(1)に規模に関する収穫逓増（increasing returns to scale）の関係が見られ、もし

$$\mathrm{r} = 1 \qquad (4)$$

であれば、$x_1$、$x_2$を双方共$\Lambda$倍することにより、生産量$x_0$も正確に$\Lambda$倍になり、式(1)に規模に関する収穫不変（constant returns to scale）の関係が見られ、もし

$$\mathrm{r} < 1 \qquad (5)$$

であれば、$x_1$、$x_2$を双方共$\Lambda$倍することにより、生産量$x_0$は$\Lambda$倍以下となり、式(1)に規模に関する収穫逓減（decreasing returns to scale）の関係が見られることになる。こゝでダグラス（P. H. Douglas）は産業技術の水準[3]に変化がなければ産出量、投入量を結ぶ生産函数(1)に式(4)の関係が見られるのが最も probable であると考えて妥当な範式として

$$x_0 = \beta x_1^{\alpha_1} x_2^{1-\alpha_1} \qquad (6)$$

を選択した。この式(6)の選択が妥当か否かが一番大きい問題であるが、それはそれとしてこの式(6)がコブ・ダグラス生産函数 (Cobb-Douglas' Production Function) と称せられているものである。[4] けだし式(6)から当然

$$\beta(Ax_1)^{\alpha_1}(Ax_2)^{1-\alpha_1} = \beta A^{\alpha_1+1-\alpha_1} x_1^{\alpha_1} x_2^{1-\alpha} = \beta A x_1^{\alpha_1} x_2^{1-\alpha_1} = A x_0 \qquad (7)$$

であるからである。所で式(6)は $\alpha_1+\alpha_2 \neq 1$ とおかれたより自由な範式

$$x_0 = \beta x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \qquad (8)$$

に於て

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \qquad (9)$$

とおかれる特殊な場合である。けだし　もし

$$\alpha_1 + \alpha_2 > 1 \qquad (10)$$

であれば、$x_0$、$x_1$、$x_2$を結ぶ技術的関係式(8)に式(3)の成立することであり、この場合 increasing returns to scale の関係が見られ、もし

$$\alpha_1 + \alpha_2 < 1 \qquad (11)$$

であれば式(8)に式(5)の成立することであり、この場合 decreasing returns to scale の関係が見られ、$\alpha_1+\alpha_2=1$ の場合が $r=1$ の場合であり、生産量・投入量の間に constant returns to scale が見られることになる。所でこの規模に関する収穫不変の関係が見られる場合には問題の生産物の生産に関する技術的生産方法は産出量の大きさにより影響されない乃至技術的生産方法は規模の大きさいかんにかかわらず一定不変である。[5] 即ち技術的に optimum

な状態で生産が行はれている限り、投入量と産出量との間の関係は一次且つ同次の函数関係で把握されること。従って問題の生産物を生産するための技術的に optimum な生産方法は規模の大きさから独立と見做されるわけである。

所で上の技術的生産函数が given としてあたえられる場合いかにして現実の投入量・産出量がきめられるか。現在の資本主義経済の下では企業が利潤極大原則に従ってきめるものと見做さざるをえない。そこで (1) 生産物市場、(2) 生産財市場に完全競争が行はれているものとして、[6] 生産物 $x_0$、生産財（今の場合労働、資本）$x_1$、$x_2$ の価格を夫々 $p_0$、$p_1$、$p_2$ にて示せば、それらの価格は企業にとり given として受納される。利潤 $\pi$ は

$$\pi = p_0 x_0 - p_1 x_1 - p_2 x_2 \tag{12}$$

にて示され、価格不変の原則の下に利潤 $\pi$ を極大ならしめるように投入量 $x_1$、$x_2$、産出量が $x_0$ きめられよう。この利潤極大条件は

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_1} = 0 \tag{13}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_2} = 0 \tag{14}$$

である。こゝで制約条件式であるダグラス函数 (8) を考えながら式 (13) (14) の利潤極大条件を求めれば

$$\frac{p_1}{p_0} = a_1 \frac{x_0}{x_1} \tag{15}$$

$$\frac{p_2}{p_0} = a_2 \frac{x_0}{x_2} \tag{16}$$

がえられる。この式 (15) (16) の右辺は式 (8) を、$x_1$、$x_2$ にて偏微分してえられるもの―これは夫々の財の限界生産力で

ある—に等しい。即ち

$$\frac{\partial x_0}{\partial x_1} = \beta a_1 x_1^{\alpha_1 - 1} x_2^{\alpha_2} = \beta\ a_1 \frac{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}}{x_1} = a_1 \frac{x_0}{x_1} \tag{17}$$

である。($\frac{\partial x_0}{\partial x_2}$ についても同様。)この式 (15) (16) が生産財の価格は限界生産力に等しく支払われるとの周知の限界生産力説の第一命題である。そして $x_1$ の価格即ち賃銀が労働の限界生産力に等しく払い出されるとすれば賃銀総額 (wage bill) $w_1$ について

$$w_1 = p_1\ x_1 = p_0\ a_1 \frac{x_0}{x_1}\ x_1 = a_1\ p_0\ x_0 \tag{18}$$

$$\therefore\ a_1 = \frac{w_1}{p_0 x_0} \tag{19}$$

がえられる。資本費用支出総額を $w_2$ とするとき同様の手続きにより

$$a_2 = \frac{w_2}{p_0 x_0} \tag{20}$$

がえられる。即ち式 (19)、式 (20) が利潤極大条件を端的に示し、企業の個人的均衡条件式である。(7)

次ぎにダグラス生産函数式 (8) から労働の限界生産力が式 (17) に示すように求められ、資本の限界生産力 $\frac{\partial x_2}{\partial x_0}$ も同様に式 (8) から求められて

$$\frac{\partial x_0}{\partial x_2} = a_2 \frac{x_0}{x_2} \tag{21}$$

にて示される。従って労働及び資本の投入量$x_1$、$x_2$が投入され産出量$x_0$が産出されて、労働及び資本の価格が限界生産力に等しく支払われるものとすれば雇用総労働及び総資本の受け取る分配分の総計は

$$\frac{\partial x_0}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial x_0}{\partial x_2}x_2 = \alpha_1 x_0 + \alpha_2 x_0 = (\alpha_1 + \alpha_2)x_0 \qquad (22)$$

となり、この式(22)に於て限界生産力説にいふ消尽の定理が成立するためには、

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \qquad (9)$$

が必要である。何故なら

$$\alpha_1 + \alpha_2 > 1 \qquad (10)$$

であれば

$$\frac{\partial x_0}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial x_0}{\partial x_2}x_2 = (\alpha_1 + \alpha_2)x_0 > x_0 \qquad (23)$$

であり、消尽の定理は成立せず従って又究極の均衡状態にもないことになり、

$$\alpha_1 + \alpha_2 < 1 \qquad (11)$$

であれば

$$\frac{\partial x_0}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial x_0}{\partial x_2}x_2 = (\alpha_1 + \alpha_2)x_0 < x_0 \qquad (24)$$

となり、この場合も限界生産力説にいふ消尽の定理は成立しないことになるからである。従ってダグラスの場合生産函数が一次且つ同次であること、即ち$\alpha_1$と$\alpha_2$との和が１に等しいことは式(22)から当然

$$\frac{\partial x_0}{\partial x_1}x_1+\frac{\partial x_0}{\partial x_2}x_2=x_0$$

であり、この場合限界生産力説にいふ消尽の定理が成立し、[8] 同時に問題の産業社会が完全競争の下における究極の均衡状態にあることを意味する筈である。何故なら後者の成立のための必要条件を生産函数が一次且つ同次であること今の場合$\alpha_1$と$\alpha_2$との和が1に等しいことに求めているからである。[9] かくしてコブ・ダグラス生産函数

$$x_0=\beta x_1^{\alpha_1}x_2^{1-\alpha_1} \qquad (6)$$

は設定されたわけである。

ダグラスは現実の産業社会に於て（完全）競争が行はれているものと見て一次且つ同次の生産函数を最も妥当なものとして選択しそれ以外を除いている。[10] けだし現実の賃銀を限界生産力によって説明しようとするのがダグラスの意図の一つであり、そのためには問題の産業社会に競争が行われているものと見做さざるをえず、しかもこの賃銀の限界生産力による説明が首尾一貫するためには限界生産力説にいふ消尽の定理の成立することが必要であり、この定理を成立せしめるための根拠を生産函数に求めて $\alpha_1+\alpha_2=1$ を設定しているからである。従って $\alpha_1+\alpha_2>1$, $\alpha_1+\alpha_2<1$ の場合はダグラスが述べているように競争社会における生産函数としては不適当なものとなるわけである。しかし現実の社会は究極にはこの種の均衡状態に落ちつくかもしれないが、必ずしもこの種の均衡状態にあるとは限らない。所が $x_0=\beta x_1^{\alpha_1}x_2^{1-\alpha_1}$ 式を設定する限り問題の産業社会がこの種の状態にあるものと見做しているから非現実的である。この範式を想定する前に実際の社会がこの種の状態にあるか否かを資料によって検討しなければならぬといふ理由からより自由な範式 $x_0=\beta x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}$ をあてはめて$\alpha_1$と$\alpha_2$とを独立に計算して $\alpha_1+\alpha_2=1$ の結果がえられるか否かを検討すべきことが D. Durand により主張されたが、[11]

ダグラスのように $a_1 + a_2 = 1$ を均衡条件として見る限り、Durand の批判は妥当なものと思われる。

今少し別の角度から見よう。社会的均衡状態に於ては企業について式 (25) が成立し、従ってこゝで考察されていない地代を別にして企業利潤が零であることになる。だから問題の産出量について

生産物の価格 ＝ （最小）平均費用　　(26)

が成立し、他方利潤極大産出量について

生産物の価格 ＝ 限界費用　　(27)

の成立しなければならぬことも周知のことであり、こゝに当然

生産物の価格 ＝ 限界費用
＝ （最小）平均費用　　(28)

である。これこそまさに完全市場に於て完全競争が行われた究極の社会的均衡状態に於ける企業に妥当する条件である。[12] 思ふに上述のダグラス理論模型にあってはすべて摩擦がないものと考えられ、$x_1$、$x_2$ のある一定量の投入量を以て即座に $x_0$ のある一定量が産出されるものと考えられてきた。[13] このいわば瞬間投入—瞬間産出の想定の下に上のダグラス模型のすべての理論的帰結はえられたものである。所がこの摩擦がないことは凡そ現実に於ては考えられぬことである。[14] 摩擦のないことの中で今固定資本財の不可動性をとりあげよう。現実に於て固定資本財（機械、建築物を含む一切の固定資本財）はその名の示すように一旦投入されると固有の寿命を持ち、given の価格の下に利潤を極大ならしめるように即座に対応せしめられることは不可能である。だからこの固定資本財の存在量（投入量）は前期より受けつがれて—その期になされる新資本の蓄積分、減価償却の積立分からなされる投資増分を別にすれば—その固定資本財の存在量にそれ以外の流動資本財が投入されて生産の行はれるのが現実である。このとき利潤を極大ならし

めるが如く、産出量を決定する条件は前記の条件式(27)であり、企業の生産に参加する条件は given と見られる価格が企業の平均費用よりも小でないといふことである。平均費用との関係については生産に参加する限りでの最も劣悪な状態にある企業について価格は限界費用に等しく（最小の）平均費用に等しいとの条件が成立し、それ以外の企業について価格は限界費用に等しいが平均費用より大であるとの条件が成立している筈である。現実がこの種の状態にあるのが probable であるから、一部の企業には利潤が生じ、劣悪な企業は利潤を得ようとして乃至競争に負けまいとして式(15)(16)乃至式(19)(20)の満足されるがような状態で生産を行はんとするであらうし、又問題の産業の外からの企業の流入が見られ、生産に参加する限りでの企業はすべて技術的にオプチマムな同一状態で生産を行はんとするであらう。こゝで技術的にオプチマムな状態にあっては生産函数が一次且つ同次であると見做せば、完全競争の下に於ける究極の均衡状態に於いて企業利潤零となり、従ってすべての企業について価格は限界費用に等しく、（一定の）最小平均費用に等しとの先記の社会的均衡条件がみたされることになる。しかし現実には摩擦（経済的の非経済的の）があってこれを妨げているわけである。だからかりに生産函数が一次且つ同次であることをみとめても、凡そ現実にはみたされる chance がまずないと考えられる severe な条件の下に於てのみ成立すると見られる均衡状態がそのまゝ現実に妥当すると見做すことには大変無理がある。例えば今の場合適用された製造工業が無利潤の状態で経営されていたとはどうしても考えられないからである。これでもはやダグラス生産函数が一次且つ同次であることの意味は明らかであると思ふ。

所で最小自乗法でダグラス範式 (8) を現実の資料にあてはめてパラメター $\alpha_1$ と $\alpha_2$ の数値を推定し以て (1) $\alpha_1$ と $\alpha_2$ との和が1に等しいか否か即ち式 (9) が妥当するか否か、(2) 更に式 (19)、式 (20) が妥当するか否か即ち $\alpha_1$ はダグラス生産函数に従って賃銀が限界生産力に等しく支払われた場合に於いて雇用総労働 $x_1$ が受取るものと期待されるべき

相対的分け前を示す数値であるが（$\alpha_2$についても同様）、この理論値の推定値 $\alpha_1$ と、これとは別個に製造工業所得統計から独立に求められた雇用総労働の相対的分け前を示す現実値とを比較しこれら二つの推定値が等しいか否かを検討しようとした。これらパラメターの推定方法、比較のやり方は後述にゆずるとして、理論的に考える限り前述のことからして、先記 (1)、(2) の仮設を現実の資料が **justify** するとは到底考えられないことも明らかである。

以上で、ダグラスの理論模型の考察は終るわけであるが、今関心をもつクロスセクション・データ (**cross-section data**) に対して、ダグラス生産函数をあてはめて、パラメターを推定しようとする場合には、労働、資本の投入量は物量的単位で測定されているものと考えて一応差支えないにしても、産出高はすべて貨幣価値額[15]で表示されている。だから当然ダグラス生産函数も変った形をとらざるをえない。ために上の二生産財、一生産物の模型をそのまゝ使用して、この場合の理論模型を示すと次のようにならう。産出高価値額を $y_0$ にて示せば、当然

$$y_0 = p_0 x_0 \tag{29}$$

でダグラス生産函数は

$$y_0 = \beta' x_1^{\alpha_1'} x_2^{\alpha_2'} \tag{30}$$

となり、この式 (30) から $\alpha_i'$ (i=1, 2) について

$$\alpha_i' = \frac{\partial y_0}{\partial x_i} \frac{x_i}{y_0} \tag{31}$$

であり、

$$\alpha_i' = \frac{\partial(p_0 x_0)}{\partial x_0}\,\frac{\partial x_0}{\partial x_i}\,\frac{x_i}{p_0 x_0} = \left(p_0 + x_0\,\frac{\partial p_0}{\partial x_0}\right)\frac{\partial x_0}{\partial x_i}\,\frac{x_i}{p_0 x_0} = \left(1 + \frac{1}{\frac{\partial x_0}{\partial p_0}\,\frac{p_0}{x_0}}\right)\frac{\partial x_0}{\partial x_i}\,\frac{x_i}{x_0}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{\frac{\partial x_0}{\partial p_0}\,\frac{p_0}{x_0}}\right)\alpha_i \qquad (32)$$

こゝでもし生産物市場に於て完全競争が行われているとすれば、需要弾力性 $\eta_0$ について

$$\eta_0 = \frac{dx_0}{dp_0}\,\frac{p_0}{x_0} \rightarrow \infty \qquad (33)$$

であり、この場合に限り

$$\alpha_i' = \alpha_i \qquad (i = 1,\ 2) \qquad (34)$$

である。(16) 次ぎに利潤極大条件についても前と同様にして

$$\frac{p_i}{p_0} = \alpha_i'\,\frac{x_0}{x_i} \qquad (i = 1,\ 2) \qquad (35)$$

この場合賃銀及び資本費用支払総額を夫々 $w_1$、$w_2$ とすれば前と同様にして

$$w_i = p_i x_i = \alpha_i'\,\frac{x_0}{x_i}\,x_i\,p_0 = \alpha_i'\,x_0\,p_0 \qquad (36)$$

$$\therefore\ \alpha_i' = \frac{w_i}{p_0 x_0} = \frac{w_i}{y_0} \qquad (37)$$

$$(i = 1,\ 2)$$

であり、これが端的に利潤極大条件を示し、もし式(32)が妥当するときは、式(19)、(20)と等しいとおかれることも当然である。更にダグラス範式(30)に於て

$$\alpha_1' + \alpha_2' = 1 \qquad (38)$$

の場合

$$\alpha_1'' + \alpha_2' = \frac{w_1}{y_0} + \frac{w_2}{y_0} = 1$$

$$\therefore \quad w_1 + w_2 = y_0 \qquad (39)$$

が求められるも、この式(38)従って又式(39)は式(33)が妥当する場合に限って、式(9)従って式(25)と等しいとおかれる。だからクロスセクション資料からパラメターを推定しても、この$\alpha_1''$、$\alpha_2'$の推定値には式(32)が示すように市場（生産物）の競争条件を示すパラメターが這入ってきており、従って$\alpha_1'$と$\alpha_2'$との和が1に等しい結果がえられても、このことが同時にいわゆる生産函数の一次且つ同次と解しうるためには

$$\alpha_1'' + \alpha_2' = \left(1 + \frac{1}{\eta_0}\right)(\alpha_1 + \alpha_2) \qquad (40)$$

であることを考えて、$\eta_0 \to \infty$でなければならず、従ってクロスセクション・データから$\alpha_1''$ $\alpha_2'$を推定しておいて、この推定値の和が1になるか否かによって、生産函数が一次且つ同次であるか否かを吟味しようとするのであれば、(1) $\eta_0 \to \infty$であることを生産物市場に於て想定するか、(2) $\eta_0 \to \infty$であることを生産物市場に於て具体的に検証しなければならぬ。

## 二　パラメターの推定方法

ダグラス範式(8)乃至その対数形である

$$\log x_0 = \log\beta + \alpha_1 \log x_1 + \alpha_2 \log x_2 \qquad (41)$$

に於て

$$X_0 = \log x_0,\qquad X_1 = \log x_1,\qquad X_2 = \log x_2\qquad B = \log\beta$$

とおいてえられる

$$X_0 = B + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 \qquad (42)$$

を資料にあてはめて、パラメター $\alpha_1$、$\alpha_2$ を推定しようとしている。ここでこの対数線型の式(41)乃至(42)は第一に $x_1$、$x_2$ を(あるいは、$X_1$ を $X_2$ を)原因変数とし、$x_0$ (或いは $X_0$)を結果変数として、生産量と労働、資本の投入量との間の因果関係を明らかにし、原因変数に対する結果変数の変化を示す式であり、第二に $x_1$、$x_2$ (或いは $X_1$、$X_2$)により、$x_0$ (或いは $X_0$)を推定しようとする式であると見做すことが出来る。後者のためだけに上記の範式を使用しようとするのであればあまり問題ないが、これを以て前者のために使用しようとした点に大きな問題がひそむことは後述の通りであるが、こゝでダグラスは $\alpha_1$、$\alpha_2$ の推定に当り最小自乗法を使用する。今 $\{X_{0}t, X_{1}t, X_{2}t\}$ $t=1,2,\cdots n$ を変数 $X_0$、$X_1$、$X_2$ の n 個の観察値からなるランダム・サムプルと考える。次にこの一組のサムプルから推定された B、$\alpha_1$、$\alpha_2$ の推定値を b、$\alpha_1$、$\alpha_2$ とすれば経験的回帰方程式は

$$X_0' = b + a_1 X_1 + a_2 X_2 \qquad (43)$$

であり、$X_0$ の観察値を、$X_{0}t$ 式(43)による推定値を $X_{0}t'$ とすれば、残差は

$$et = X_0t - X_0t' \qquad (t = 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n) \tag{44}$$

であり、最小自乗法では

$$\Sigma(et^2) = \Sigma(X_0t - X_0t')^2 = \Sigma(X_0t - b - a_1X_1t - a_2X_2t)^2 \tag{45}$$

が最小になるように $b$、$a_1$、$a_2$ がきめられる。こゝでこのための条件は

$$\frac{\partial\Sigma(et^2)}{\partial b} = 0 \tag{46}$$

$$\frac{\partial\Sigma(et^2)}{\partial ai} = 0 \qquad (i=1,\ 2) \tag{47}$$

上式から

$$\Sigma\ (X_0t - b - a_1\ X_1t - a_2\ X_2t) = 0 \tag{48}$$

$$\Sigma\ (X_0t - b - a_1\ X_1t - a_2\ X_2t)\ X_1t = 0 \tag{49}$$

$$\Sigma\ (X_0t - b - a_1\ X_1t - a_2\ X_2t)\ X_2t = 0 \tag{50}$$

式(48)から

$$nb = \Sigma X_0t + a_1\ \Sigma X_1t + a_2\ \Sigma X_2t$$

$$\therefore\ b = \frac{\Sigma X_0t}{n} + a_1\frac{\Sigma X_1\ t}{n} + a_2\frac{\Sigma X_2tn}{n} \tag{51}$$

こゝで

$$\overline{X}_0 = \frac{\Sigma X_0\ t}{n},\quad \overline{X}_1 = \frac{\Sigma X_1\ t}{n},\quad \overline{X}_2 = \frac{\Sigma X_2\ t}{n} \tag{52}$$

とおけば式(51)から

$$b = \overline{X}_0 + a_1 \overline{X}_1 + a_2 \overline{X}_2 \tag{53}$$

この式(53)を式(49)、(50)に代入して

$$\Sigma \{(X_0t-\overline{X}_0) - a_1(X_1t-\overline{X}_1) - a_2(X_2t-\overline{X}_2)\} (X_1t-\overline{X}_1)=0 \tag{54}$$

$$\Sigma \{(X_0t-\overline{X}_0) - a_1(X_1t-\overline{X}_1) - a_2(X_2t-\overline{X}_2)\} (X_2t-\overline{X}_2)=0 \tag{55}$$

今

$$mij = \sum_{t=1}^{n} (Xit-\overline{X}i)(Xit-\overline{X}j) \tag{56}$$

$$(i,\ j = 0,\ 1,\ 2)$$

とおけば式(54)、(55)から

$$a_1 m_{11} + a_2 m_{12} = m_{01} \tag{57}$$

$$a_1 m_{21} + a_2 m_{22} = m_{02} \tag{58}$$

がえられ、この式から $a_1$、$a_2$ が求められ、この $a_1$、$a_2$ を式(53)に代入してbが求められる。

即ち今

$$M = \begin{vmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} \end{vmatrix} = |mij| \quad (i,j = 0,\ 1,\ 2) \tag{59}$$

とおけば

$$a_1 = -\frac{M_{01}}{M_{00}}, \quad a_2 = -\frac{M_{02}}{M_{00}} \tag{60}$$

であり、$M_{ij}$ $(i, j=0,1,2)$ は式 (59) の $(i, j)$ 要素の co-factor である。上述の最小自乗法による推定に於て最小限原因変数としてとられた $X_1$、$X_2$ の数値は観察誤差を含むことなく確定的に測定されることが必要であり、更に結果変数としてとられた $X_0$ は不規則に確率変化するものと考えられている。即ち $X_0$ の決定には経済理論的には $X_1$、$X_2$ 以外の諸原因変数が当然あづかっている筈であるが、こゝでなされている推測目的から、推定値の計算上の制約から乃至資料の面から $X_1$、$X_2$ の二つが原因変数としてとりあげられて、外の諸原因変数は捨てられている。だからこれらのとりあげられなかった諸原因変数の結果変数に対して持つ諸作用を綜合して方程式誤差項 $\varepsilon$ として示すとき、母集団に於ける真の回帰函数としては

$$X_0 = B + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \varepsilon \tag{61}$$

でなければならぬ筈である。所でもし $X_0$ が $E(\varepsilon) = 0$ の不規則の偶然変化を示すならば $E(ai) = \alpha i$ $(i = 1, 2)$ であることが証明され、更に方程式誤差項 $\varepsilon$ が $N(0, \sigma^2)$ の正規分布をするものと見做すことが出来るとすれば上記の最小自乗推定値は最尤推定値となり、推定値 $ai$ の標準誤差 $\sigma ai$ をにて示すとき

$$\sigma ai = \frac{M.\ M_{00}.ii}{(n-3)\ M_{00}^2} \quad (i = 1, 2) \tag{61}$$

である。(18) 尚以上に於て結果変数は観察誤差を含まぬものと考えたが、観察誤差を含んでも方程式誤差項と同一の分布法則に従ふものと見做しうれば、上のやり方はこの場合にもそのまゝあてはまる。

## 三 推定結果

推定に当って適当な年度を選び、製造工業を対象として、そこに含まれる各産業の生産価値額、労働及び資本の投入量が観察値としてとられた。しかし生産価値額の生産には労働、資本の投入量以外のものが当然参与するから、前記ダグラス範式をあてはめてパラメターを推定するため、いわゆる産業附加価値額がとられねばならぬ。このため生産価値額から(1)原料費は生産価値額に比例する要素として差引かれた。[19] 更に (2) 固定資本財の減価償却分は当然差引かれるべきであるが、この推定が不可能乃至困難のときには差引かれない数値が使用された。労働の投入量。これはすべての労働は同質 (homogeneous) と見て各産業年間雇用平均労働者数がとられた。資本の投入量。これは大体総資本価値額がとられたが、物量的単位ではかられた資本資産の相対的な大きさを示す数値と見做された。推定目的からして資料は本来投入量でなければならぬが、[20] かりに一歩ゆづって存在量と見ても特に資本の数値はかなり大きい測定上の誤差を含むものであり、しかもこの資本の数値から固定資本の存在量を推定し、この数値に減価償却率の推定値を乗じて減価償却分を求め、これを生産価値額から差し引いて附加価値額を求めている。といふことは今の場合回帰分析に於て原因変数としてとられた変数の観察誤差と結果変数としてとられた変数の観察誤差の間にかなり強い相関々係の存在することを意味する。[21] 更にあてはめに当って以下の五つの想定がなされている。(1) 産業間の附加価値額の差異は産業の差異を無視して、土地を除き労働及び資本量のみの変化の函数として考える。(2) 製造工業生産価値額は附加価値額に比例する。(3) 平均労働者の生産力は産業間に於て一定。(4) 一単位の資本の生産力は産業間に於て一定。(5) 労働、資本は夫々産業間に於て一定の使用強度をもつ[22]――これは技術的のオプチマムの強度に対応し、且つ上記労働、資本の存在量を以てそのまゝ投入量と同一視せしめるに役立つ。

次に今までの推定結果の一部を示すが、第一表[23]に於て年度は選ばれた年度、Nは含まれる産業の数 $a_1$、$a_2$ は夫々 $a_1$、$a_2$ の推定値、$\sigma a_1$、$\sigma a_2$ は $a_1$、$a_2$ の推定誤差 b は $\beta$ の推定値を示し、$\overline{W_1}$ は夫々の適用例に於て、所得統計から計算された製造工業総雇用労働者の現実に於て受けとった相対的分け前を示す観察値である。

| 年度 | N | $a_1$ | $\sigma a_1$ | $a_2$ | $\sigma a_2$ | $a_1+a_2$ | b | $\overline{W_1}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1889 | 363 | .51 | ±.03 | .43 | ±.03 | .94 | 58.34 | .60 |
| 1899 | 332 | .62 | ±.02 | .33 | ±.02 | .95 | 106.43 | .58 |
| 1904 | 336 | .65 | ±.02 | .31 | ±.02 | .96 | 107.40 | .64 |
| 1909 | 258 | .63 | ±.02 | .34 | ±.02 | .97 | 90.99 | .63 |
| 1914 | 340 | .61 | ±.03 | .37 | ±.02 | .98 | 81.66 | .59 |
| 1919 | 556 | .76 | ±.02 | .25 | ±.02 | 1.01 | 244.21 | .59 |

第一表　アメリカ合衆国製造工業について

次ぎに導出された経験的ダグラス函数に上記名サムプルの労働及び資本の投入量を代入して計算された理論値と観察値の対応関係を示す表が第二表である。[24] この表の $\sigma$ は各サムプルに於て計算された推定値の標準誤差（$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma (X_i t - X_i t')^2}{n}}$）、Sは各産業毎の残差 $S = X_i t - X_i t'$ であり、各サムプルの産業総数に於て占める度数と比率の双方が示されている。一番最後の段に示されている比率は各サムプルが正規分布すると見做す場合における

比率を示す。

| 年度 | N | S<1σ | | 1σ≦S≦2σ | | 2σ<S | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1889 | 363 | 280 | 77.0% | 63 | 17.0% | 20 | 6.0% |
| 1899 | 332 | 250 | 75.0 | 70 | 21.0 | 12 | 4.0 |
| 1904 | 336 | 236 | 70.0 | 82 | 25.0 | 18 | 5.0 |
| 1909 | 258 | 215 | 83.0 | 38 | 15.0 | 5 | 2.0 |
| 1914 | 340 | 243 | 72.0 | 83 | 24.0 | 14 | 4.0 |
| 1919 | 556 | 453 | 82.0 | 85 | 15.0 | 18 | 3.0 |
| — | — | — | 68.3% | — | 26.7% | — | 5 % |

第二表　アメリカ合衆国製造工業について

外の最近における適用例[25]も多数えられているが、スペースの都合と、上記のものがあればそれで今の論議には事足りるから以上の例にとどめる。

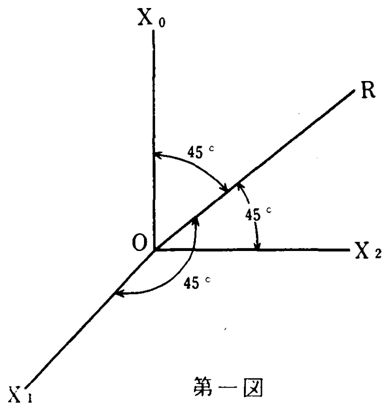
上の適用例からは (1) $a_1$ と $a_2$ との和が1に近いとの結果が注目され、従って $\alpha_1$ と $\alpha_2$ との和が1であるとの仮設は少くとも斥けられない。[26] (2) $a_1$ が $W_1$ に近いこと。(3) 理論値と観察値の対応関係は極めて密であることが目につく。上の三つの点は外の推定結果についても同様にえられており、更に (4) $\alpha_1$ $\alpha_2$ の推定値が一定値のまわりにむ

らがっている傾向も上記以外の推定結果から看取されるところである

## 四　以上の吟味

### （I）推定結果について

(1) 上記の結果に関する限り、$a_1$ と $a_2$ との和は1に近く、$\alpha_1$ と $\alpha_2$ との和が1に等しいとの仮設は斥けられないことがわかる。しかしこのことはいわゆる生産函数の一次且つ同次といふ仮設を現実の資料が justify するものと見做してよいかといふに決してそうではない。これを見ると、何故 $a_1$ と $a_2$ との和が1に近いといふ上記の結果がえられたかについて少しく考えてみよう。このため $X_0$ 軸、$X_1$ 軸、$X_2$ 軸を座標軸とする図形上にクロスセクション・データをプロットして見よう。即ち夫々各年度について各産業毎の附加価値額、労働、資本の投入量の対数をとり対数図表上にプロットするわけである。そうすると大体、各年度に於てそれらの観察諸点はこれを図示すれば第一図の OR に沿うて分布していることが共通の特徴として見られる。(27) こゝにこの OR は各座標軸に夫々 45° の傾斜をもって画かれている。扨こゝでダグラス函数 $X_0 = B + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2$ をこの三次元図形上に示せば勿論平面となり、この平面の $X_1$ 軸えの傾斜が $\alpha_1$ を、$X_2$ 軸えの傾斜が $\alpha_2$ をあらわすことも勿論である。もし観察諸点が正確に OR 上にあれば従って当然 $X_0 = X_1 = X_2$ であり、$B=0$ であるからダグラス範式から $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ が導出出来る。(28) 正確には現実の資料は OR




第一図

上にないが、OR に沿うて観察点が分布しており、しかもこのことがすべてのクロスセクション・データの共通の特徴としてあげられる。だからこのことがすべての適用例に於て $a_1$ と $a_2$ との和が1に近いとの結果を示したものと解しうるわけである。所が各産業毎の附加価値額、労働及び資本の投入量は各年度の生産センサスに報告された各企業のそれらを産業毎に集計してえられ、これらの集計量が産業毎に平行的関係を示したわけである。だから生産センサスに於て採用された産業分類そのものが、冪指数の和が1になるとの推定結果をもたらしたものともいえるようである。[29] こゝで上の産業分類に果してどれだけの理論的意味があるか、乃至今のわれわれの推定目的に対して適当か否かを考え、もし適当でなければ（われわれはそう思ふのであるが）別個の標準に立って附加価値額、労働及び資本の資料を整理し直して新しくパラメターを推定すべきであると思はれる。従って前述の産業集計量資料をそのまゝ使用して先記の結果がえられてもこれは決してわれわれの生産函数が一次且つ同次であることの証左にはならぬと思われ、変数の選択に問題ありとする所以である。こゝで観察資料が正確に前記 OR 上にあれば、これらの観察諸点にあてはめられるべき、回帰平面は無数にあることになる。正確に OR 上になくても、OR に沿ふて分布していれば—現実の資料はそうである—これらの観察諸点にあてはめられるべき回帰平面は数多くあり、従って回帰平面のあてはめにあたって最小化の方向をどの方向にとるかが当然問題になるのであるが、ダグラスは終始 $X_0$ 方向えの最小化の方向を選び、更に資料が上記 OR に沿ふて分布することを認めながらも尚且つ、資料はかくして決定されるダグラス平面を決定するに十分な scatter をもっと信じてい[30]るがこれは後述のように疑問であるし、更に "That the experience of the whole period covered only a relatively small range of all the possible combinations of labor and capital which might be made and that we do not have values for the large majority of potential combinations which lie outside the range covered." と述べているが、[31] そしてこのこと自体変数の選択に就中

**aggregation** に問題あることを示すものと考えてよい。

もともとダグラス函数は経済理論にいう生産函数を念頭において、この種の生産函数が一次且つ同次の函数か否かを吟味するため設定されたものである。そして利用される資料の面と、推定目的と、計算方法との三点から考えて前記の指数型生産函数の形がとられたわけである。だから当然ダグラス生産函数にとりいれられていない生産要素が存在する筈である。例えば原料であるが、原料費用部分はダグラスのいふように生産価値額に比例する **limitational factor** として処理されるとしよう。更に土地、〃企業家職能〃が **fixed factor** としてあげられる。もし生産函数が一次且つ同次であることを含まれるすべての生産要素の量を一定数倍するとき、産出高も正確に同一倍されることと考え、ダグラス式の中には理論模型上含まれぬ生産要素があり、しかもこれが問題の生産函数にとり固定的ファクターであると見做されれば、ダグラス函数が一次且つ同次であっても決して理論にいふ〃生産函数〃が一次且つ同次といふことにはならぬわけである。何故なら

$$x_0 = \beta x_1^{\alpha_1} x_2^{1-\alpha_1} \tag{6}$$

から、次式

$$x_0 = \beta \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\alpha_1} x_2 \quad (\because\ x_2 \neq 0) \tag{62}$$

式(62)に於て $\frac{x_1}{x_2}$ は一定不変従って $\beta \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\alpha_1} = B_1$ とおけば

$$x_0 = B_1\ x_2 \tag{63}$$

をうる。式(63)の右辺 $x_2$ の冪指数は1である。しかし、固定的要素がこれ以外にあると考えれば、ダグラスもいふように収穫逓減の関係が当然成立し式(63)は

$$x_0 = B_1 x_2^{\triangle} \tag{64}$$

$$\triangle < 1 \tag{65}$$

とおかれるべきである。とすれば式(64)から前と逆の計算を行って

$$x_0 = \beta x_1^{\alpha_1} x_2^{\triangle - \alpha_1} \tag{66}$$

$$\therefore \alpha_1 + \triangle - \alpha_1 = \triangle < 1 \tag{67}$$

であり、従っていわゆる生産函数の規模に関する収穫逓減の事実と親和しうることを知る。このように考えて経験的ダグラス函数が一次且つ同次であることと企業の大規模経済の法則が必ずしも親和しないものではないことがいわれている。[33] しかしダグラス生産函数式は経済理論にいふ生産函数の性質を吟味するため設定されたもので、生産函数を考えるとき瞬間投入―瞬間生産は常識であり、摩擦はないと考えられている。このため土地は、重要な要素ではあるがいかにしても上の取りあつかいになじまぬので、生産要素からこれを除き従って附加価値額から地代を除去したのである。これは技術函数としての生産函数―殊に近代的産業のそれ―を考える場合にはまあ妥当とされようし、就中分配の限界生産力説の検討といふ目的からは致し方ないことゝ思われる。他方生産函数を制約条件として市場条件を考えて利潤極大の行為を行ふものは、現在の資本主義経済の下では企業しかないのであるが、しかしだからといって企業家職能を生産函数の中に独立な固定的な生産要素として取りいれねばならぬといふ理由はないと思ふ。けだし、これは生産の産出量と投入量の間の技術的関係を規定する関係式であるからである。この技術的函数から現実の産出

量、投入量を決定しようとするとき、企業の利潤極大行為が問題となるわけであり、技術的条件式である生産函数はあくまで可能なる投入量と産出量との間の関係を規定する式で、この関係式に於て生産方法が規模の函数となるか否かを問題としたのである。そして摩擦はないと考えられているから、ダグラス函数のあてはめられる現実の資料は利潤極大点と考えられねばならなかったわけである。[34]

上の考察からダグラス函数のあてはめられるべき資料は当然一企業のそれでなければならぬ。ところが、これがえられないからインター・インダストリの資料が利用されたわけである。だから一産業一企業のしかもげんみつには各産業同一生産物を生産しているものと考えざるをえない。さもなければダグラス函数をあてはめて、パラメターを推定しても意味がない。だから初めから、インター・インダストリ資料に対するあてはめには無理があるわけである。けだし産業が異ればパラメター $\alpha_1$、$\alpha_2$ の数値は別々のものでなければならず、又生産物の種類によってはダグラス型の生産函数自体が適用されない場合もありうるからである。こう考えてくるとき単一のダグラス函数をあてはめてパラメター $\alpha_1$、$\alpha_2$ を推定し、そしてこの推定値を以て各産業のパラメターの平均値と見做してもどれだけの理論的意味があるか不明である。こゝでダグラスは先記の経験的ダグラス函数が労働及び資本の投入量から産出高を推定するに当って非常に良好な結果をえている事実をあげる。[35] そして、本来産業毎にパラメターは同一ではないが、これらを別々に計算することは不可能乃至困難であるから、すべての産業を同質のものとして $\alpha_1$、$\alpha_2$ を計算せざるを得ないと述べながらも、[36] 結果変数の推定値と観察値との双方を比較するとき良好の結果がえられている上記結果を引用して、パラメター推定のやり方を是認しているようである。[37] しかし、ダグラス函数を単なる推定方程式として使用する場合はそれでよいとしても、構造方程式のパラメターの推定として使用する場合この結果に信頼をおくことが出来ぬことは先述の通りである。更に推定方程式として使用する場合と雖も、推定を行ったサムプルと新しく推定しようと

するサムプルの間に統計学的にある種の同一条件の妥当する場合に限り理論的に有効であり、[38]全く手放しで推定して見ても推定値は意味をもたぬ。

一方ダグラスは資料がインター・インダストリの産業集計量であるとの非難に答えて、各産業の附加価値額、労働及び資本の投入量を各産業の事業体の数で除して、いわゆるプラント平均を求めて、回帰分析を行っている。[39]しかしこれで十分とは考えられない。何故ならプラント平均を求めることにより各産業における企業の規模の差は消失し、産業間の規模の差のみ生ずるにすぎず、しかもこのような平均的企業(とみなして)がとられうるためは少くとも各産業の企業の規模の差がなく、正確に同一条件で生産が行はれておると見做すことが必要であり、しかもこの状態こそ理論的には産業が社会的均衡状態にあることと大体同義と考えられ、これこそダグラス函数をあてはめて $\alpha_1$、と $\alpha_2$ との和が1になることを以て立証しようとした事柄であったからである。とにかく今までの議論は、資料の各企業毎の分布状況を明かにして乃至は分布状況について何らかの仮定を設けて推定の処理をしなければならぬことを示しているようである。

ダグラスは $a_1$ と $a_2$ との和が1に近い場合について今一つの解釈をあたえている。即ち $a_1$ と $a_2$ との和が1よりも小である結果がえられたとき、規模に関する収穫逓減の法則の存在を示すものと一応見做した場合、問題の製造工業が **optimum size** をこえており、企業は生産要素のもっとも有効な結合により **justity** される規模より大なる規模で経営されていることの証左と見做している。[40]だから、オプチマム・サイズに到達するまでは、企業の生産函数は規模に関する収穫逓増、そこに到達して収穫不変、そこをこえると収穫逓減が妥当すると考え、産業のオプチマム・サイズ—これを産業均衡状態と見ている—に於て企業の生産は最小平均費用点で即ち収穫不変点で行はれると解しているようである。[41]産業均衡状態ではすべての企業は最小平均費用の同一の最適規模で生産が行はれ、生産物の価格は平

均費用に等しく勿論限界費用に等しい。しかもこの最適規模が十分小さく、競争が行はれるに十分な数の企業の存在を許すと考えれば、前述の限界生産力説の第一、第二命題は共に成立し、更にひいては、"**Since industries were merely aggregates of firms and the economy as a whole was an aggregate of industries, it was presumed that the linear function tended, therefore, to be true of society as a whole as its growing points.**"[42]ともいはれうる所以であらう。[43]企業の生産函数が一次且つ同次であることが競争経済に於ける企業の生産函数としては極めて不適当のことを考えても $a_1 + a_2 = 1$ を上のように解釈するのが[44]妥当とも思はれるが、本来のダグラス函数設定の目的とは別個であり、上のように解する限り、えられたダグラス函数は決して式 (1) 乃至式 (8) と等しくおかれえず従って、このダグラス函数を制約条件として利潤極大条件も求められず、企業の decision function に参与しえぬものである。

(2)　上のように考えるとき、$a_1$ と $\bar{w}_1$ との比較もあまり意味がなくなる。導出されたダグラス函数は経済理論にいふ生産函数とは異るから、この函数を $x_1$ で偏微分して $\frac{\partial x_0}{\partial x_1}$ を求め、これに賃銀が等しく支払はれるものとして理論値 $\frac{\partial x_0}{\partial x_1}\frac{x_1}{x_0}$ を求めても労働者のうけとる相対的分け前の理論値を示さぬ筈であるからである。かりに一歩ゆづってダグラス函数が経済理論にいふ生産函数と見て、労働の価格が $\frac{\partial x_0}{\partial x_1}$ に等しく支払はれ、従って相対的分け前を示す理論値は $\frac{\partial x_0}{\partial x_1}\frac{x_1}{x_0}$ と考えてみよう。こゝに $x_1$ は製造工業の労働雇用者総数であり、従って完全競争の下に於てはすべての労働者に同一賃銀 $\frac{\partial x_0}{\partial x_1}$ が支払はれていると考えていることになる。ところが一口に製造工業といっても産業毎に雇用される労働者の質に差があり、完全競争の下にあっても支払はれる賃銀に差があることは常識であり、賃銀格差の事実の示す所である。だから $\frac{\partial x_0}{\partial x_1}\frac{x_1}{x_0}$ を以て製造工業の雇用労働者の受けとる賃銀の相対的部

分を示す理論値とは考えられぬ。

由来この両者の比較がなされたのは、労働が限界生産力に等しく支払ひだされているか否か、労働が企業の需要独占的搾取にさらされているか否かを検討するためであった。このため完全競争の下に於て労働の受けとると考えられる相対的分け前を示す理論値 $\alpha_1$ を推定して $\bar{w}_1$ と比較したのであり、そして $\alpha_1$ の推定値は物量的生産函数から推定された。（乃至そう見做されるべきである。）だから賃銀の限界生産力説を検討するためのいはば measure たるべきものは $\alpha_1$ の推定値 $a_1$ であり、このため $\alpha_1$ の推定値 $a_1$ に市場の競争条件を反映するものが這入ってくると困るから、$a_1$ は物量タームで推定された乃至そのように見做さざるをえなかったのである。こうしておいて、$a_1$ と $\bar{w}_1$ とを比較することは大きな意味があるわけである。ところが前述の式(34)の示すように市場条件を反映する因子がすでに $a_1$ の中にはいっており、だから上述のことも今の資料からの推定値 $a_1$ についてはあてはまらぬわけである。他方ダグラスはえられた $\alpha_1$ の推定値を、$a_1$ が $\bar{w}_1$ に近いといふ事実に求めている。即ち $\alpha_1$ の推定値 $a_1$ が別個に計算された $\bar{w}_1$ に近ければ、これを以て $a_1$ の信頼度、従って又えられた生産力函数の信頼度を高めるものと見做している。[45] だからこの場合 measure といはれうべきものは $\bar{w}_1$ であり、この $\bar{w}_1$ を以て $a_1$ をいはば検討することになり、しかも $a_1$ のもつ意味からして当然 $\bar{w}_1$ は限界生産力に等しく賃銀が支払はれた場合における労働の相対的分け前を示す数値と見做されねばならず、従ってわざわざ $\alpha_1$ の推定値 $a_1$ を推定しておいて、これを $\bar{w}_1$ と比較する必要は全然ないわけである。（但し $\alpha_2$ の推定値 $a_2$ と $\bar{w}_2$ との比較は全然なされていない。）

更に $a_1$ と $a_2$ との和が1に近いとの結果が一般にえられていることを考えて、次式がえられよう。

$$\frac{\partial x_0}{\partial x_1}\frac{x_1}{x_0}+\frac{\partial x_0}{\partial x_2}\frac{x_2}{x_0}=1 \qquad (68)$$

$$\therefore\quad \frac{\partial x_0}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial x_0}{\partial x_2}x_2 = x_0 \qquad (69)$$

今 $\frac{\partial x_0}{\partial x_1} = f_1(x_1)$, $\frac{\partial x_0}{\partial x_2} = f_2(x_2)$, $x_0 = x_0'' = \text{constant}$ とおけば

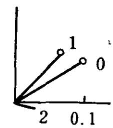
$$f_1(x_1)x_1 + f_2(x_2)x_2 = x_0'' \qquad (70)$$

となる。所が $x_0 = f(x_1, x_2)$ に於て $x_0 = x_0''$ とおいて一般的に $g_1(x_1)x_1 + g_2(x_2)x_2 = x_0''$ が得られるとした場合、この形の式を満足する $x_1$、$x_2$ は無数にある筈である。だから $x_0$、$x_1$、$x_2$ の現実の資料に回帰分析をあてはめて冪指数の和が1になるとの結果がえられてもこれを式(70)とは直ちに解釈出来ないわけである。即ち現実の社会に於ては生産量、投入量の決定が経済理論通りには行かず、(1) たとえば利潤極大が想定されているが、瞬間投入―瞬間産出の仮定が現実にみたされるとは考えられないから、利潤極大は無条件には行はれず条件付極大となり、(2) たとえば更に組合等の圧力により労働量の増減が思ふにまかせぬとすれば、条件付極大すらも考慮されぬ場合もおこり、(3) 更に今まで全然考慮されていない生産財市場の競争が完全か否かを考察の中にとりいれるとき上式の左辺 $g_1(x_1)$、$g_2(x_2)$ の部分が経済理論通り $f_1(x_1)$、$f_2(x_2)$ になっているとはどうしても考えられず、しかも $\alpha_1$ と $\alpha_2$ の推定値 $a_1$ と $a_2$ の和が1に等しいとの推定結果が偶然の一致によって起ることもありうると考えられるからである。

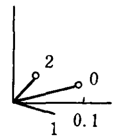
(II) 推定方法について

こゝではパラメターの推定方法に関する考察である。最小自乗法による推定にあっては原因変数と見做された $x_1$、$x_2$ のサンプルは観察誤差を含むことなく正確に測定されることが必要であった。ところがの労働投入量を示す $x_1$ の

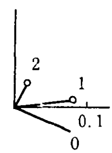
観察値はともかくとして、資本の投入量を示す $x_2$ はかなり大きな観察誤差を含むものであった。（従って当然 $X_1$、$X_2$ も同様である。）このことがパラメターの推定にどのような影響をあたえるか。これに答えるものがバンチ・マップ（Bunch Map）による考察である。ダグラスは例えば1919年の製造工業例についての b.m. をあたえている。この b.m. が次の六つの図表に示されているわけである。第二図から第七図の左の図表に於て0の記号は生産額の対数、1の記号は労働投入量の対数、2の記号は資本投入量の対数を示すものである。



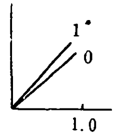

第五図



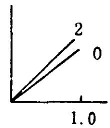

第六図



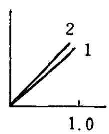

第七図




第二図




第三図




第四図

第二図は $X_0$、$X_1$ に、第三図は $X_2$、$X_0$ に、第四図は $X_1$、$X_2$ に関する b.m. である。第二図について説明するに、今求められた回帰方程式を夫々

$$X_0' = a_1 X_1 \qquad (71)$$

$$X_1' = a_0 X_0 \qquad (72)$$

とし（但し $a_1$ はダグラス函数のパラメター $\alpha_1$ の推定値 $a_1$ と同一のものではない。）式(72)に於て

$$X_1' = X_1 \qquad (73)$$

とおけば

$$X_0' = \frac{1}{a_0} X_1 \qquad (74)$$

がえられる。こゝに回帰係数 $a_1$、$a_0$ については、

$$a_1 = \frac{m_{01}}{m_{11}} \tag{75}$$

$$a_0 = \frac{m_{01}}{m_{00}} \tag{76}$$

である。今 $X_j$ と $X_i$ の相関係数を $r_{ij}$ にて示せば、定義から

$$r_{ij} = \frac{m_{ij}}{\sqrt{m_{ii}\ m_{jj}}} = m_{ij} \qquad (i, j = 0, 1, 2) \tag{77}$$

であり、定義から当然

$$|r_{ij}| \leqq 1 \tag{78}$$

であり、等号は $i = j$ の場合に限る。そこで第二図の ray 0 は $a_1$ の要素から、ray 1 は $1/a_0$ の要素から求められたものである。従って式(75)(76)から明らかであるように ray 0 は原点（1, $r_{01}$）との座標点を結び、ray 1 は原点と（$r_{10}$, 1）の座標点を結んで画かれ、レイ（ray）の方向と長さが夫々決定されるわけである。だからレイ 0 とレイ 1 が一致した場合 $X_0$、$X_1$ は完全相関である。言葉をかえると $X_1$ により $X_0$ は説明し尽されるわけである。図3、図4のレイについても同様にして画かれ、これらの三つの図表の場合二本のレイの狭角が非常に小さいから、非常に高い相関関係を示すことになる。

さて第二図、第三図、第四図の見られるような場合は結果変数の変動を只一つの原因変数によって説明しようとした関係であったのであるが、更に今一つの原因変数を追加してよりよく説明しようとする試みがなされた場合のビー

• エムが第五図、第六図、第七図である。こゝに第五図は結果変数 $X_0$、原因変数 $X_1$、追加変数 $X_2$、第六図は結果変数 $X_0$、原因変数 $X_2$、追加変数 $X_1$、第七図に於ては結果変数 $X_1$、原因変数 $X_2$、追加変数 $X_0$ であるがこゝでも第五図のみを説明する。

扨 $X_0$、$X_1$、$X_2$ に関する回帰方程式は次の3つである。$X_0$ 軸の方向を最小化の方向とするとき

$$X_0' = a_{01} X_1 + a_{02} X_2 \tag{79}$$

$X_1$ 軸の方向を最小化の方向とするとき

$$X_1' = a_{10} X_0 + a_{12} X_2$$

この式で　$X_1' = X_1$　として　(80)

$$X_0' = \frac{X_1}{a_{01}} - \frac{a_{12}}{a_{10}} X_2 \tag{81}$$

$X_2$ 軸を最小化の方向として

$$X_2' = a_{20} X_0 + a_{21} X_1 \tag{82}$$

この式で　$X_2' = X_2$　として

$$X_0' = -\frac{a_{21}}{a_{20}} X_1 + \frac{1}{a_{20}} X_2 \tag{83}$$

所で前記の計算から $X_0$ の係数は

$$a_{01} = \frac{\begin{vmatrix} \Sigma X_0X_1 & \Sigma X_1X_2 \\ \Sigma X_2X_0 & \Sigma X_2^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Sigma X_1^2 & \Sigma X_1X_2 \\ \Sigma X_2X_1 & \Sigma X_2^2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} m_{10} & m_{12} \\ m_{20} & m_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix}} = -\frac{M_{01}}{M_{00}} \qquad (84)$$

同様にして

$$\frac{1}{a_{10}} = -\frac{M_{11}}{M_{10}} \qquad (85)$$

$$-\frac{a_{21}}{a_{20}} = -\frac{M_{21}}{M_{20}} \qquad (86)$$

$X_1$ の係数も同様にして

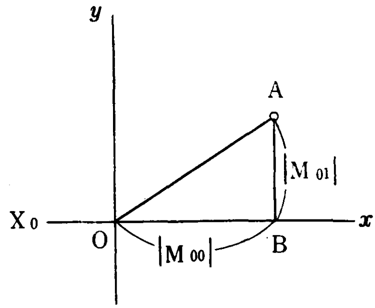
$$a_{02} = -\frac{M_{02}}{M_{00}} \qquad (87)$$

$$-\frac{a_{12}}{a_{10}} = -\frac{M_{12}}{M_{10}} \qquad (88)$$

$$\frac{1}{a_{20}} = -\frac{M_{00}}{M_{20}} \qquad (89)$$

ところで、b. m の描き方であるが、$a_{01}$ を例にとれば $\overline{OB} = M_{00}$（分母）の絶対値、点Bは必ず $\overline{ox}$ 上にとり、$\overline{AB} = M_{01}$（分子）の絶対値（但し分母と分子が同符号ならば第四象限に点Aをとり、分母と分子が異符号な

らば第一象限内に点Aをとる。かくして第八図のように画かれ、外のレイも同様にして画かれているわけである。同様にして第五、六、七図のレイが求められているわけである。



第八図

さて変数系 $X_0$、$X_1$、$X_2$ に於て

$$Xit = xit + eit \tag{90}$$

$$(i = 0, 1, 2, \quad t = 1, 2, \cdots\cdots, n)$$

とする。$xit$ 及び $eit$ は夫々 $Xit$ の組織的部分と誤差的部分とし

$$E(eit\ ejt) = 0, \qquad E(eit\ eis) = 0,$$

$$E(xit\ eit) = 0, \tag{91}$$

$$E(eit^2) > 0$$

と見做す。勿論 $i=j$ のこともありうる。一言でいえば相関係数は零、統計的には独立といふことである。

(1)　今 $x_0$、$x_1$、$x_2$ の変数系に simply colinear が成立するものとし

$$x_0 = a_1 x_1 + a_2 x_2 \tag{92}$$

としよう。そうすれば

$$\Sigma X_0^2 = a_1^2 \Sigma x_1^2 + 2a_1 a_2 \Sigma x_1 x_2 + a_2^2 \Sigma x_2^2 + \Sigma e_0^2$$

$$\Sigma X_0 X_2 = \Sigma X_2 X_0 = a_1 \Sigma x_1 x_2 + a_2 \Sigma x_2^2$$

$$\Sigma X_0 X_1 = \Sigma X_1 X_0 = a_1 \Sigma x_1^2 + a_2 \Sigma X_1 X_2$$

$$\Sigma X_1 X_2 = \Sigma x_1 x_2$$

$$\Sigma X_1^2 = \Sigma x_1^2 + \Sigma e_1^2$$

$$\Sigma X_2^2 = \Sigma x_2^2 + \Sigma e_2^2$$

上の関係から

$$a_{01} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 \Sigma x_1^2 + a_2 \Sigma x_1 x_2 & \Sigma x_1 x_2 \\ a_1 \Sigma x_1 x_2 + a_2 \Sigma x_2^2 & \Sigma x_2^2 + \Sigma e_2^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Sigma x_1^2 + \Sigma e_1^2 & \Sigma x_1 x_2 \\ \Sigma x_1 x_2 & \Sigma x_2^2 + \Sigma e_2^2 \end{vmatrix}} \tag{93}$$

（ $\Sigma ei^2 \fallingdotseq 0$ とすれば）

$$\fallingdotseq \frac{a_1 \begin{vmatrix} \Sigma x_1^2 & \Sigma x_1 x_2 \\ \Sigma x_2 x_1 & \Sigma x_2^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Sigma x_1^2 & \Sigma x_1 x_2 \\ \Sigma x_2 x_1 & \Sigma x_2^2 \end{vmatrix}} = \frac{a_1 \begin{vmatrix} 1 & r_{12}' \\ r_{21}' & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & r_{12}' \\ r_{21}' & 1 \end{vmatrix}} \tag{94}$$

$\frac{1}{a_{10}}$、$-\frac{a_{21}}{a_{20}}$ も同様の結果になる。従ってレイ $a_{01}$、$\frac{1}{a_{10}}$、$-\frac{a_{21}}{a_{20}}$ の方向及び長さは $\Sigma ei^2$ が小であれば殆んど一致する。　但し $r'ij$ は $xi$、$xj$ の相関係数を示すものである。

今変数系の間に式 (92) が成立しているときに回帰方程式として

$$x_0' = a_{01} x_1 \tag{95}$$

$$x_1' = a_{10} x_0 \tag{96}$$

を求めたとすれば、$x_1' = x_1$ とおき

$$x_0' = \frac{1}{a_{10}}\, x_1 \tag{97}$$

がえられ、変数系 $x_1$、$x_2$ が独立のとき

$$a_{01} = \frac{\alpha_1}{1} \tag{98}$$

$$\frac{1}{a_{10}} = \frac{\alpha_1}{1} + \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1} \tag{99}$$

となり、両者は $\alpha_2=0$ のときのみ一致し、$\alpha_2 \neq 0$ のとき、b. m に $a_{01}$、$\frac{1}{a_{10}}$ を描くときは方向長さ共に一致しない。従って $X_0$ の変動 $X_1$ をのみで説明しようとする回帰方程式の b. m. は上のようになるが、適当な追加変数 $X_2$ が追加された場合残差部分が存在する関係上3本のレイが完全に一致することはないであろうが、レイの束は引き締る筈である。

(2) 変数系 $x_0$、$x_1$、$x_2$ の間に只一つの関係式

$$x_0 = \alpha_1 x_1 \tag{100}$$

が成立するとき、回帰方程式を式(95)(96)とすれば回帰系数は夫々

$$a_{01} = \frac{\alpha_1}{1} \tag{98}$$

$$\frac{1}{a_1} = \frac{\alpha_1}{1} \tag{101}$$

ところで $X_1$ と独立な（無用）追加変数 $X_2$ を追加した場合の回帰方程式を式 (79) (81) (83) とすれば

$$a_{01} = -\frac{M_{01}}{M_{00}} \rightarrow \frac{\alpha_1}{1} \tag{102}$$

$$\frac{1}{a_{10}} = -\frac{M_{11}}{M_{10}} \rightarrow \frac{\alpha_1}{1} \tag{103}$$

$$-\frac{a_{21}}{a_{20}} = -\frac{M_{21}}{M_{20}} \rightarrow 0 \tag{104}$$

残差が存在するから、レイ $a_{01}$、$\frac{1}{a_{10}}$、は一致することはないだらうが、引きしまった束になるであらう。$-\frac{a_{21}}{a_{20}}$ は方向が乱れ、長さは短かくなるであらう。（上記の場合は原点に一致。）

(3)　変数系の間 multi-colinear が存在するとき即ち

$$x_0 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \tag{105}$$

$$x_0 = \alpha_3 x_1 + \alpha_4 x_2 \tag{106}$$

が成立するとき、このことは

$$x_0 = \frac{\alpha_2\alpha_4 - \alpha_1\alpha_3}{\alpha_2 - \alpha_3}\, x_1 , \qquad x_1 = \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_4}\, x_2$$

が成立することに等しい。従って (2) の場合と同様のことがこの変数系に就いて成立す。併しこの場合追加変数 $X_2$ は $X_1$ と独立ではない。従って $X_2$ が追加された場合先きと同じ手続きによると

$$a_{01} = \frac{0}{0} \tag{107}$$

$$\frac{1}{a_{10}} = \frac{0}{0} \tag{108}$$

$$-\frac{a_{21}}{a_{20}} = \frac{0}{0} \tag{109}$$

となる。勿論残差が存在するから3つの束が原点に一致することはないであらう。こゝでは残差のためにレイの束は爆発し且つ長さも短くなるであらう。以上フリッシュ（R. Frisch）の変数誤差模型について考察したが、[47] b. m. は方程式誤差模型に拡張出来ると考えられている。

以上の予備的説明に照らして考えるに、図を見ての形式的な面からのみでは、追加変数は detrimental variate と或いはたかだか superfluous variate と判定されるであらう。（第二、三、四図により予知され、第五、六、七図にはっきり示されている）併しダグラスは $X_0$ 方向えの最小化を固執し、経済理論の立場から追加変数を除去することには反対のようで、従ってまづ $X_0$ の変動を説明するに $X_1$ と $X_2$ とは何れが重要な要素であるかを見、次に追加変数も必要であることを示しているようである。だから普通の b.m. の利用法即ちレイの束が爆発すれば detrimental variate として捨て、束がひきしまれば useful variateとして採用するというのではなく、[48] $X_1$ と $X_2$ のうち何れが重要な要素であるかを示そうとしている。だから第五図についてレイ1が相対的に短くないのに、レイ2が短いこと、これは0と1との関係が密接なことを示し、第六図について、2が相対的に短かく、1が長いことはこれ又0と1の関係が密接なことを示し、第七図について1と0との関係が密接であることを示すことにより "The map indicates that capital has not a strong effect." と述べ、[49] その次に $X_2$ の必要を考察している。しかし $X_2$ が追加された場合前記の multi-colinear の関係により、パラメターの推定値の信頼度の低下することは周知の通りである。

(1) 拙稿「ダグラス生産函数研究」北九州大学商学部紀要第二号

(2) P. H Douglas, "Are There Laws of Production ?" American Economic Review, March, 1948, pp 20〜21, pp 36〜40

(3) P. H. Douglas, "The Theory of Wages" 1957 pp. 20〜21 議論を進める形式的の面から考えて、ダグラスのように産出量をP、労働及び資本の投入量をL、Cにてあらはさずに、夫々 $x_0$、$x_1$、$x_2$ にてあらはした。

(4) P. H. Douglas, "The Theory of Wages" pp. 132〜133 C. W. Cobb and P. H. Douglas, "A Theory of Production," A.E R. Supplement, March, 1928, pp. 151〜152

(5) D. Durand, "Some Thoughts on Marginal Productivtiy, with Special Reference to Prof Douglas' Analysis" The Journal of Political Economy, Vol. 45. 1937 p. 742. J. Marschak and W. H. Andrews Jr., "Random Simultaneous Equations and The Theory of Production" Econometrica, Vol 12, July-Octover, 1944, p. 152

(6) G T. Gunn and P. H Douglas, "The Production Function for Australian Manufacturing." Quarterly Journal of Economics., Nov, 1941, p. 108 ここでダグラスは生産財市場に於ては終始完全競争を想定し、生産物市場については (1) その生産主体を企業と考えるとき、完全競争（価格不変といふ意味での）が妥当すると見、(2) 産業と考えるとき完全競争が妥当しないと見ているが、後述からも明らかであるように現時の経済に於ては生産主体たりうるものは企業だけである。更に生産財市場について価格不変の完全競争の想定が妥当するか否かが問題にされている。しかもダグラスの場合この両種の市場が完全か否かについて特別の言及はなされていないようである。しかし理論的に考える限り $\alpha_1$、$\alpha_2$ はこの両種の市場が完全市場である場合の相対的分け前を示す理論値であり、これと現実のわけ前を示す観察は $W_1$、$W_2$（後出）とを比較し、この両者が等しくなることにより (1) これら二種の市場が完全市場であること。(2) 分配分が限界生産力に従って支払はれているこ

とを示さんとしたものである。　(M. Bronfenbrenner and P. H. Douglas "Cross-section Studies in the Cobb-Douglas Function." The Journal of Political Economy," December 1939. p. 767)　だから特にとりだして市場の完全か否かを吟味する必要はない。しかし、クロスセクション・データから $a_1$、$a_2$ を推定する場合にはそう簡単に推論することが出来ぬことは後述の通りである。

(7) G. T. Gunn and P. H. Douglas. op. cit. pp. 110～112

(8) 限界生産力説については例えば栗村雄吉博士「生産と分配」昭和二十四年 pp. 68～124 参照。

(9) コブ・ダグラス函数の設定に当って、Wicksteed の名をあげていること　(A Theory of Production." p. 151)　からも明らかである。　P. H. Douglas. "The Theory of Wages" pp 53～56

(10) P. H. Douglas. "The Theory of Wages," pp. 22～25. D. Durand. op. cit. p. 748

(11) D. Durand. op. cit. pp. 754～755

(12) 栗村雄吉博士「生産と分配」 p. 122

(13) P. H. Douglas, "The Theory of Wages," pp. 69～71

(14) ダグラスもそう見ている。 P. H. Douglas, "The Theory of Wages," p. 84

(15) 一口に製造工業といっても雑多の産業が含まれ、従って生産物の種類を異にするから、物理的単位で表示しても無駄である。同じことは程度の差こそあれ労働、資本の投入量にもあてはまる。

(16) 詳細な理論模型については J. Marschak and W. H. Andrews Jr. op. cit. にゆずる。

(17) J. Marschak and W. H. Andrews Jr. op. cit.

(18) G. T. Gunn and P. H. Douglas, "Further Measurment of Marginal Productivity" Quarterly Journal of Economics, May. 1940 pp. 406～407。その他一般の統計学関係の参考書を参照。

(19) G. T. Gunn and P. H. Douglas, "Further Measurement of Marginal Productivity" p. 403　倘原料費が生産価値額に比例する要素であるか否かの検討が資料についてなされ、比例する要素であることが示された例があげられうる。(V. N. Murti and V. K Sastry, "Production Functions for Indian Industry" Econometrica April, 1957. p. 213

(20) H. Mendershausen, "On the Significance of Prof Douglas' Production Function" Econometrica., April, 1938 pp. 144～145

(21) M. Bronfenbrenner and P H. Douglas "Cross-section Studies in the Cobb-Donulas Function," J. P. E. Decenber 1939 pp 768～772

(22) G. T. Gun and P. H. Douglas, "Further Measurment of Marginal Prodnctivity" p 403

(23) P. H. Douglas, "Are There Laws of Production?" p. 12　附加価値額、労働、資本の投入量の資料についての説明は例えば pp. 12～13 を参照。$\overline{w}_1$ の計算については pp. 36～40。詳しくは今までの外のクロスセクション分析の文献を参照。

(24) P. H. Douglas, "Are There Laws of Production?" pp. 25

(25) P. H. Douglas, "Are There Laws of Production?" pp. 12～18 pp. 25～40　V N. Murti and V. K. Sastry, op. cit.

(26) 例えば、回帰係数の和が1に等しいとおいてえられた回帰方程式の残差の平方の和を求めて $\theta_2$、1に等しいとおかないでえられた経験的回帰方程式の残差の平方の和を $\theta_1$ としよう。そうすれば、回帰係数の和が1に等しいとの帰無仮設の下で $F = \frac{\theta_2 - \theta_1}{\theta_1}(n-p)$（n は観察値の数、p は変数の総数今の場合3）は $F(n_1=1,\ n_2=n-p)$ 分布に従ふことが示され、これによって1の仮設がテストされたが斥けられなかった。(V. N. Murti and V. K. Sastry, op. cit. p. 207. G. Tintner pp. 90～91)

(27) G. T. Gunn and P. H Douglas, "The Production for Australian Manufacturing." p. 119　M. Bronfenbrenner and P. H. Douglas., op. cit. p 768　G T Gunn and P. H. Douglas. "The Production Function for American Manu-

facturing in 1919." A. E. R. Vol. 31 1941 p. 76

(28) 正確にそうでなくとも、 $X_0$ の単位を適当にとれば回帰方程式の常数項 B=0 ならしめることが出来、 $X_0=\alpha_1 X_1+\alpha_2 X_2$ から $\alpha_1+\alpha_2=1$ である。

(29) E. H. P. Brown, "The Meaning of the Fitted Cobb-Douglas Function.' ' Q. J. E. Nov. 1957

(30) G. T. Gunn and P. H. Douglas, "The Production Function for Australian Manufacturing" p. 120 G. T. Gunn and P. H. Douglas "The Production Function for American Manufacturing in 1919" pp. 74～77

(31) P. H. Douglas, "The Theory of Wages." p. 220

(32) D. Durand. op. cit. 755

(33) 特に〃企業家職能〃を固定的要素と考えるものに G. Tintner ("Econometrics" p. 55) があげられよう。

(34) J. Marschak and W. H. Andrews Jr op. cit. §8, M W. Reder., "An Alternative Interpretation of the Cobb-Douglas Function." Econometrics, July-Oct. 1943 p. 260

(35) P. H. Douglas, "Are There Laws of Production?" pp. 31～33

(36) P. H. Douglas, "The Theory of Wages." pp. 209 ～216

(37) P. H. Douglas, "Are There Laws of Production?" pp. 31～33

(38) H. Mendershausen, "Rejoinder," A E. R. Vol 31 1941 pp. 567～568

(39) P. H. Douglas, "Are There Laws of Production?" pp. 22～24

(40) P H. Douglas, "Are There Laws of Production?" p. 14

(41) M. Bronfenbrenner and P H. Douglas. op. cit. pp. 780～782

(42) P. H. Douglas, "Are There Laws of Production?" pp. 3～4

(43) D. Durand., op. cit. p. 749, J. Marschak and W H Andrews Jr op. cit Appendix 1

(44) G. T. Gunn and P. H. Douglas, "The Production Function for American Manufactuing in 1914" J P. E. p. 600

(45) P. H. Douglas, "Are There Laws of Production?" p. 38

(46) G. T. Gunn and P. H. Douglas, "The Production Function for American Manufacturing in 1919" p. 73 他に "Further Measurement of Marginal Productivrty" p. 410 にも示され大体同一の傾向を示す。これらは勿論時系列のそれ (H. Mendershausen, "On the Significance," p. 148) と比較されうるものである。尚以下の b. m. の説明は周知のものとは思ふが、議論を進めるために必要な最小限度に於て述べた。尚この点について鹿児島県立短大釜場一郎氏から多大の教示をえたことを明記しておきたい。

(47) 詳細は R. Frisch, "Stastical Confluence Analysis by Means of Complete Regression Analysis." 青山秀夫「経済変動理論の研究」第一巻 pp 251〜280 参照。

(48) しかしこの判定を行ふ場合、余程明瞭な結果がえられない限り可成り主観的判断のはいるのがさけられぬことも周知である。即ち〝仮設検定〟の場合には、自由度と有意水準に応ずる数表が確定されていて、計算結果の数字と対比して、仮設が棄却されるか否かは何等の主観をまじえることなく判定されるわけであるが、b. m. の場合はそうではないからである。

(49) G. T Gunn and P. H. Douglas, "The Production Function for American Manufacturing in 1919" p 74

(1960. 1. 5)